

LOS ENFOQUES DIDÁCTICOS PARA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS GRÁFICAS Y NUMÉRICAS EN DÉCIMO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA SUPERIOR

DIDACTIC APPROACHES FOR SOLVING GRAPHICAL AND NUMERICAL QUADRATIC EQUATIONS IN TENTH GRADE OF HIGHER BASIC EDUCATION

Erika Gianella Merino Chamba ^{1*}

¹ Economista. Estudiante de la Maestría Didáctica de la Matemática. Ecuador. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7741-3222>. Correo: gianella.93@hotmail.com

Danny Manuel Diaz Puruncaja ²

² Docente Investigador Universidad Técnica de Cotopaxi, Ecuador. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2929-6855>. Correo: dany.diaz3951@utc.edu.ec

Jessica Catalina Álvarez Espín ³

³ Ingeniera Comercial, Ecuador. ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-5498-8889>. Correo: jessy20ae@gmail.com

Nancy Mireya Hernández Padilla ⁴

⁴ Magíster en Educación Básica. Docente de Unidad Educativa San José La Salle, Latacunga, Cotopaxi Ecuador. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5323-8034>. Correo: nancymire@hotmail.com

* Autor para correspondencia: gianella.93@hotmail.com

Resumen

El presente artículo tuvo por objetivo favorecer el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de ecuaciones cuadráticas, con un enfoque didáctico efectivo. La investigación que dio origen al presente artículo fue de tipo descriptiva, combinando el análisis documental en el estudio del tema y el análisis de la práctica para develar, con base en la experiencia, las consideraciones didácticas metodológicas que han sido efectivas en el proceso de enseñanza aprendizaje y recomendarlas a quienes trabajan esta importante temática en el décimo grado, lo que permitió plantear las siguientes conclusiones: Los estudiantes de décimo grado deben

ser capaces de resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos, como la factorización, la fórmula cuadrática, completar el cuadrado y la gráfica; deben comprender los conceptos básicos de las ecuaciones cuadráticas, como la forma estándar, el vértice, el eje de simetría y las raíces y deben aplicar las ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas del mundo real; se recomienda prestar especial atención a los estudiantes de décimo grado para que sean capaces de factorizar ecuaciones cuadráticas simples, usar la fórmula cuadrática para resolver cualquier ecuación cuadrática, utilizar la gráfica puede ser una herramienta útil para visualizar las soluciones de una ecuación cuadrática y aprender el método de completar el cuadrado y la enseñanza de la resolución de ecuaciones cuadráticas debe basarse en una variedad de enfoques didácticos que combinen estrategias gráficas y numéricas. La aplicación de las ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas del mundo real y el uso de recursos tecnológicos son elementos importantes para un aprendizaje efectivo.

Palabras clave: enfoques didácticos; resolución de ecuaciones cuadráticas gráficas y numéricas; educación básica superior y enseñanza aprendizaje

Abstract

The objective of this article was to promote student learning in solving quadratic equations, with an effective didactic approach. The research that gave rise to this article was descriptive, combining documentary analysis in the study of the topic and analysis of practice to reveal, based on experience, the methodological didactic considerations that have been effective in the teaching process. learning and recommend them to those who work on this important topic in the tenth grade, which allowed us to draw the following conclusions: Tenth grade students should be able to solve quadratic equations by different methods, such as factoring, the quadratic formula, completing the square and the graph; They must understand the basic concepts of quadratic equations, such as standard form, vertex, axis of symmetry, and roots, and must apply quadratic equations to solving real-world problems; It is recommended to pay special attention to tenth grade students so that they are able to factor simple quadratic equations, use the quadratic formula to solve any quadratic equation, using the graph can be a useful tool to visualize the solutions of a quadratic equation and learn the The method of completing the square and the teaching of solving quadratic equations should be based on a variety of teaching approaches that combine graphical and numerical strategies. The application of quadratic equations to solving real-world problems and the use of technological resources are important elements for effective learning.

Keywords: didactic approaches; solving graphical and numerical quadratic equations; higher basic education and teaching learning

Fecha de recibido: 08/01/2024

Fecha de aceptado: 21/03/2024

Fecha de publicado: 01/04/2024

Introducción

El artículo se sustentó en una investigación que tuvo por objetivo favorecer el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de ecuaciones cuadráticas, con un enfoque didáctico efectivo, que considere tres componentes esenciales, el alumno quien es protagonista del proceso de enseñanza - aprendizaje, el docente como coprotagonista, quien toma el papel de guía y facilitador del conocimiento.

El contenido en el que se basa el presente trabajo de investigación es la teoría de las ecuaciones cuadráticas, por lo cual es importante una comprensión teórico sólida, desde su concepción. Es relevante que los estudiantes se apropien del conocimiento, lo definan e identifiquen sus características, para luego abordar como resolverlas gráfica y numéricamente.

Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones polinómicas de segundo grado, su amplio estudio se ha desarrollado durante siglos (Dehghan & Shokri, 2009), se remonta a la antigüedad con el hallazgo de las tablillas babilónicas del 1700 a.C., en las cuales se tiene registro de la resolución de problemas cuadráticos (Faghihi et al., 2014).

Se aborda el desarrollo histórico y la caracterización de las ecuaciones cuadráticas. En la Grecia antigua el matemático Diofanto de Alejandría formaliza este concepto y le da un nuevo enfoque pedagógico (Amat et al., 2003). Finalmente es el matemático francés François Viète quien hizo posible una fórmula ($ax^2 + bx + c = 0$), que considere todas las ecuaciones cuadráticas, donde (a, b, c) pertenecen a los números reales y ($a \neq 0$) (García et al., 2022).

Este concepto considerado fundamental para las ciencias matemáticas tiene diversas aplicaciones en algunas ciencias como la ingeniería, física, química, entre otras (Rodríguez et al., 2019).

Materiales y métodos

La investigación que dio origen al presente artículo fue de tipo descriptiva, combinando el análisis documental en el estudio del tema y el análisis de la práctica para develar, con base en la experiencia, las consideraciones didácticas metodológicas que han sido efectivas en el proceso de enseñanza aprendizaje y recomendarlas a quienes trabajan esta importante temática en el décimo grado.

Resultados y discusión

El hallazgo de las tablillas de la “Antigua Babilonia” dejó al descubierto que la matemática más avanzada de la antigüedad no era la egipcia. Vargas Mejía, (2013) en su tesis señala:

Que en la tablilla del 1700 a. de C., se encuentra el que es considerado el primer registro conocido de resolución de problemas que involucran ecuaciones de segundo grado, que es resuelta dada solamente su raíz positiva. (p. 33)

El proceso de formación de las primeras teorías matemáticas tiene sus orígenes en las escuelas científicas filosóficas de la Grecia antigua, en el periodo de los siglos VI- IV a. n. e. Ribnikov, (1987) afirma:

En las matemáticas de esta época lo nuevo era que los problemas prácticos poco a poco desprendieron una nueva rama independiente de las matemáticas que obtuvo la denominación de logística. A la cual

le fueron atribuidas: las operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, el cálculo con la ayuda de dispositivos auxiliares del tipo del ábaco, el cálculo con fracciones, la resolución numérica de problemas que conducen a ecuaciones de 1ro y 2do grado, problemas prácticos de cálculo y constructivos de la arquitectura, agrimensura, etc. (p. 51-52)

Aunque no se tiene evidencia de resolución de la ecuación cuadrática, los especialistas en los papiros afirman que los egipcios resolvieron algunos problemas que incluían ecuaciones de segundo grado, especialmente relacionados con problemas de tipo geométrico, y en particular en el manejo de áreas. Vargas Mejía, (2013) expone:

Esto coincide con lo planteado inicialmente en cuanto al cobro de impuestos del que eran objeto los egipcios, de acuerdo con la medida de la superficie de tierra que tuvieran. Indudablemente había trabajo con áreas de figuras que posiblemente llevaban a ecuaciones de segundo grado, pero no hay evidencias de métodos o algoritmos para solucionar tal tipo de ecuaciones (p. 20)

El desarrollo de las ecuaciones cuadráticas ha sido de forma general, sin embargo, toma un nuevo horizonte en Grecia donde se formaliza este conocimiento, además de tener un nuevo enfoque pedagógico, Vargas Mejía, (2013) recalca:

Que Diofanto de Alejandría se convierte en uno de los matemáticos más representativos. La “Arithmetica” de Diofanto, que, para algunos historiadores de la matemática, tiene el mismo impacto en el Álgebra, que el que tienen los “Elementos” de Euclides para la geometría, nos ofrece algunos problemas que resuelve el autor, de manera muy algebrizada, introduciendo el “arithmo” como una abreviatura adecuada para simplificar ecuaciones e incógnitas. Diofanto muestra un dominio perfecto de la forma de solucionar ecuaciones algebraicas, que le permiten plantear problemas con infinitas posibilidades de solución y variaciones en las condiciones iniciales del problema; no importando si son sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas o de orden superior, y de una o varias indeterminaciones. (p. 115)

Francois Viéte introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades conocidas en una ecuación.

Antes de la época de Viéte, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. La idea de Viéte era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo $ax^2+bx+c=0$ donde a, b y c eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una fórmula (en este caso, la fórmula cuadrática). (Stewart, Redlin, & Watson, 2017, p.49)

Para los estudiantes es esencial el conocimiento del proceso epistemológico de la formación de las ecuaciones cuadráticas. Con el objetivo de desarrollar una profunda comprensión del concepto, se enfatiza en la importancia que tiene este conocimiento en diferentes aplicaciones de la vida cotidiana como la física, economía, entre otras.

Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es también conocida como ecuación de segundo grado. Baldor, (1983) la define, como toda ecuación en la cual una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es dos. Se puede clasificar de la siguiente forma:

Ecuaciones completas de 2º. Grado son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, que tienen un término en x^2 , un término en x , y un término independiente de x .

Ecuaciones incompletas de 2º. Grado son ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ que carecen del término en x o de la forma $ax^2 + bx = 0$ que carecen del término independiente.

Toda ecuación de 2º. grado tiene dos raíces, significa que ambos valores satisfacen la ecuación. (p. 446)

Ecuaciones cuadráticas gráficas

Una ecuación cuadrática es una ecuación de segundo grado, es decir, la variable de mayor exponente es 2. La forma estándar de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son números reales, y a es diferente de 0.

La gráfica de una ecuación cuadrática es una parábola. Una parábola es una curva simétrica en forma de U.

Características de la parábola:

Vértice: El vértice es el punto de la parábola donde cambia la dirección de la curva. Las coordenadas del vértice son:

$$(-b/2a, -\Delta/4a) \text{ donde } \Delta \text{ es el discriminante, que se calcula como: } \Delta = b^2 - 4ac$$

Eje de simetría: El eje de simetría es una línea vertical que pasa por el vértice. La ecuación del eje de simetría es: $x = -b/2a$

Raíces: Las raíces son los puntos donde la parábola intercepta al eje x . Las raíces se pueden encontrar usando la fórmula cuadrática: $x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$

Métodos para graficar ecuaciones cuadráticas:

Completar el cuadrado: Este método consiste en convertir la ecuación a la forma estándar de la ecuación de una parábola.

Usar la fórmula cuadrática: Este método consiste en encontrar las raíces de la ecuación y luego graficar la parábola usando los puntos de intersección con el eje x .

Usar una tabla de valores: Este método consiste en crear una tabla de valores para la ecuación y luego graficar los puntos de la tabla.

Ejemplos:

Ecuación: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Vértice: $(-1, 1)$

Eje de simetría: $x = -1$

Raíces: $(-3, 0)$ y $(1, 0)$

Gráfica:

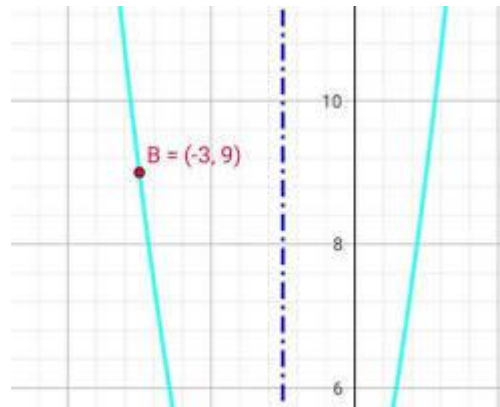


Figura 1. Imagen de parábola with vertex at $(1, 1)$, axis of symmetry $x = 1$, and roots at $(3, 0)$ and $(1, 0)$

Ecuación: $y = -x^2 + 4x - 3$

Vértice: $(2, 1)$

Eje de simetría: $x = 2$

Raíces: $(1, 0)$ y $(3, 0)$

Gráfica:

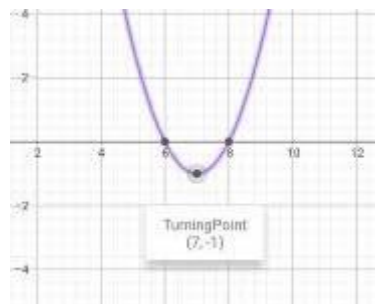


Figura 2. Imagen de parábola with vertex at $(2, 1)$, axis of symmetry $x = 2$, and roots at $(1, 0)$ and $(3, 0)$

Ecuaciones cuadráticas numéricas

Una ecuación cuadrática numérica es una ecuación cuadrática que tiene coeficientes numéricos.

Ejemplos:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas numéricas:

Factorización: Este método consiste en factorizar la ecuación en dos binomios.

Fórmula cuadrática: Este método consiste en usar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de la ecuación.

Completar el cuadrado: Este método consiste en convertir la ecuación a la forma estándar de la ecuación de una parábola y luego encontrar las raíces de la ecuación.

Gráfica: Este método consiste en graficar la parábola y luego encontrar las raíces de la ecuación como los puntos de intersección con el eje x.

Ejemplos de resolución:

Ecuación: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Factorización: $(x + 3)(x - 1) = 0$

Solución: $x = -3, 1$

Fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2^2 - 4(1)(-3))}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = 1, -3$$

Completar el cuadrado:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x = -1 \pm 2$$

$$x = 1, -3$$

Gráfica:

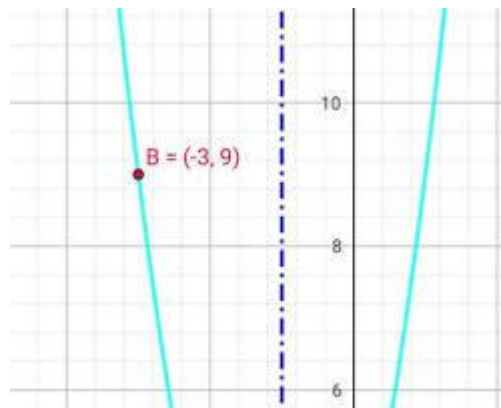


Figura 3. Imagen de parábola with vertex at (1, 1), axis of symmetry $x = 1$, and roots at (3, 0) and (1, 0)

Las ecuaciones cuadráticas se utilizan en muchas áreas de la matemática, la ciencia y la ingeniería. Algunas aplicaciones incluyen: Modelar el movimiento de proyectiles, encontrar el área de una parábola y resolver problemas de optimización.

Para enseñar la resolución de ecuaciones cuadráticas en el décimo grado de Educación Básica Superior es recomendable asumirlo como un desafío, ya que requiere que los estudiantes comprendan varios conceptos matemáticos. Para que este proceso sea más efectivo es necesario la motivación durante la clase. Es recomendable comenzar con una introducción motivadora que explique la importancia de las ecuaciones cuadráticas en el mundo real mostrando ejemplos de cómo se usan en física, ingeniería, economía y otras áreas, para ello es sugerente la lluvia de ideas para que los estudiantes piensen en problemas que se pueden resolver con ecuaciones cuadráticas.

Es importante asegurarse de que los estudiantes comprendan los conceptos básicos de las ecuaciones cuadráticas, como la forma estándar, el vértice, el eje de simetría y las raíces, para ello se pueden usar recursos como videos, animaciones o diagramas para ayudar a los estudiantes a visualizar estos conceptos. Se sugiere presentar diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, como la factorización, la fórmula cuadrática, completar el cuadrado y la gráfica, así como explicar las ventajas y desventajas de cada método y cuándo usar cada uno, ilustrando con ejemplos de cómo usar cada método para resolver ecuaciones cuadráticas.

Es de suma importancia que los estudiantes practiquen la resolución de ecuaciones cuadráticas con los diferentes métodos, para ello se pueden aportar ejercicios de diferentes niveles de dificultad para que puedan desarrollar sus habilidades, proceso que se puede acompañar con plataformas online o aplicaciones para que los estudiantes practiquen de forma interactiva.

Es recomendable estimular a los estudiantes a usar las ecuaciones cuadráticas para resolver problemas del mundo real. Se le pueden ofrecer problemas contextualizados que les permitan aplicar los conocimientos trabajando en equipo o individual y usando las ecuaciones cuadráticas de forma creativa.

Para lograrlo es necesario adaptar la enseñanza al nivel de los estudiantes, usar diferentes estrategias de aprendizaje para que todos los estudiantes puedan participar, ser paciente y comprensivo, ya que algunos estudiantes pueden necesitar más tiempo para comprender los conceptos y su aplicación y, además, reconocer los logros de los estudiantes y motívalos a seguir aprendiendo.

La resolución de ecuaciones cuadráticas es un tema fundamental en la enseñanza de las matemáticas a nivel secundario. Existen diversos enfoques didácticos y estrategias para abordar este tema, tanto desde la perspectiva gráfica como numérica.

Enfoques gráficos:

- Gráfica de la parábola: Este enfoque consiste en representar la ecuación cuadrática como una parábola y luego identificar las raíces como los puntos de intersección con el eje x. Este método es intuitivo y permite visualizar las soluciones de la ecuación.
- Análisis del vértice: Este enfoque se basa en la comprensión del vértice de la parábola como el punto de cambio de dirección. A partir del vértice, se pueden determinar las características de la parábola y las soluciones de la ecuación.
- Uso de software educativo: Existen diversos programas y aplicaciones que permiten graficar ecuaciones cuadráticas y explorar sus propiedades de forma interactiva.

Enfoques numéricos:

- Factorización: Este método consiste en expresar la ecuación como un producto de dos binomios. Las raíces de la ecuación son los valores que hacen que uno de los binomios sea igual a cero.
- Fórmula cuadrática: Esta fórmula proporciona una solución directa para las raíces de cualquier ecuación cuadrática.
- Completar el cuadrado: Este método transforma la ecuación a una forma estándar que permite encontrar las raíces de forma más sencilla.

Estrategias didácticas:

- Variedad de métodos: Es importante presentar a los estudiantes diferentes métodos para resolver ecuaciones cuadráticas y fomentar la elección del método más adecuado en cada caso.
- Resolución de problemas: La aplicación de las ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas del mundo real permite contextualizar el aprendizaje y desarrollar la capacidad de aplicar los conocimientos a situaciones prácticas.
- Uso de recursos tecnológicos: Los programas y aplicaciones informáticas pueden ser herramientas valiosas para la visualización de las ecuaciones cuadráticas y la exploración de sus propiedades.

Estos enfoques y estrategias son importantes para la enseñanza aprendizaje de la resolución de ecuaciones cuadráticas gráficas y numéricas en décimo grado de Educación Básica Superior.

Conclusiones

Las ecuaciones cuadráticas se han desarrollado en una amplia historia que se remonta a la antigua Babilonia, con los primeros registros de problemas cuadráticos.

Los estudiantes de décimo grado deben ser capaces de resolver ecuaciones cuadráticas por diferentes métodos, como la factorización, la fórmula cuadrática, completar el cuadrado y la gráfica; deben comprender los conceptos básicos de las ecuaciones cuadráticas, como la forma estándar, el vértice, el eje de simetría y las raíces y deben aplicar las ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas del mundo real.

Se recomienda prestar especial atención a los estudiantes de décimo grado para que sean capaces de factorizar ecuaciones cuadráticas simples, usar la fórmula cuadrática para resolver cualquier ecuación cuadrática, utilizar la gráfica puede ser una herramienta útil para visualizar las soluciones de una ecuación cuadrática y aprender el método de completar el cuadrado.

La enseñanza de la resolución de ecuaciones cuadráticas debe basarse en una variedad de enfoques didácticos que combinen estrategias gráficas y numéricas. La aplicación de las ecuaciones cuadráticas a la resolución de problemas del mundo real y el uso de recursos tecnológicos son elementos importantes para un aprendizaje efectivo.

Referencias

- Amat, S., Busquier, S., & Gutiérrez, J. M. (2003). Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 157(1), 197-205.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042703004205>

- Baldor, A. (1983). *Álgebra*.
[https://www.bing.com/search?pglt=41&q=Baldor A Algebra Publicaciones Culturale.pdf](https://www.bing.com/search?pglt=41&q=Baldor+A+Algebra+Publicaciones+Culturale.pdf)
- Dehghan, M., & Shokri, A. (2009). Numerical solution of the nonlinear Klein–Gordon equation using radial basis functions. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 230(2), 400-410.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042708006365>
- Faghihi, U., Brautigam, A., Jorgenson, K., Martin, D., Brown, A., Measures, E., & Maldonado-Bouchard, S. (2014). How gamification applies for educational purpose specially with college algebra. *Procedia Computer Science*, 41, 182-187.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050914015476>
- García, J. G., Yañez, M. E. H., & López, M. I. R. (2022). Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*(13), 17.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8626472>
- Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir. Moscú: Mir.
- Rodríguez, A. R., Zavala, C. V. P., Pionce, M. S. P., Solarzano, S. E. S., Parrales, T. M. M., Mejía, R. M. V., & Ávila, J. W. C. (2019). Relaciones de las categorías pedagógicas en función del aprendizaje óptimo (Vol. 47). *3Ciencias*.
<https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=mgiFDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA7&dq=Relaciones+de+las+categor%C3%ADas+pedag%C3%B3gicas+en+funci%C3%B3n+del+aprendizaje+%C3%B3ptimo&ots=uijIcAIVdh&sig=caHRMknFVLpRozdUdtg50BVauV8>
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo*. México, D. F., México: Cengage Learning Editores, S.A. Obtenido de <https://archive.org/details/Precalculo-Matematicas-para-el-calculo-Septima-edicion/page/n3/mode/2up>
- Vargas Mejía, J. A. (2013). *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela*. Medellín, Colombia. Obtenido de <https://pdfslide.net/documents/un-viaje-por-la-historia-de-algunas-ecuaciones-2016-05-05-pocas-de-expansin.html?page=1>